Rompicapo probabilistico: verso una soluzione della congettura di Goldbach?

Autore: D'AMICO ROSARIO, r.damico78@libero.it

Abstract. Questo lavoro mira a fornire una serie di considerazioni che ci consentano di scorgere una possibile soluzione alla problematica questione della congettura "forte" di Goldbach, ossia che *ogni numero naturale pari maggiore di 2 può essere scritto come somma di due numeri primi non per forza distinti*. Ciò adottando un metodo probabilistico assolutamente elementare rispetto ai tentativi classici di dimostrazione.

Introduzione

La congettura di Goldbach è uno dei più vecchi e irrisolti problemi di quella branca della matematica che studia le caratteristiche dei numeri interi. Essa, nella sua formulazione qui trattata e detta forte, afferma che *ogni numero naturale pari maggiore di 2 è esprimibile come somma di due numeri primi non necessariamente distinti*, ed è pertanto un'ipotesi sulle proprietà dei numeri primi e in particolare sulla loro distribuzione tra i numeri interi positivi.

Ma cosa deve intendersi esattamente per numero primo? Vi sono sostanzialmente due definizioni di numero primo: una annovera 1 tra i numeri primi, l'altra – ed è quella più largamente accettata dai matematici – lo esclude solo per mere ragioni di convenienza e opportunità.[1]

Alla luce di ciò, il numero 1 è un numero primo? Siamo nel dubbio riguardo a questa questione. Sfruttare tale situazione di ambiguità come possibile leva per tentare di verificare la veridicità della congettura forte di Goldbach è l'obiettivo di questo lavoro.

Esso verrà raggiunto nel secondo dei due paragrafi che compongono questo scritto. Nel primo proporremo in via preliminare alcune definizioni e alcuni lemmi utili allo scopo di fissare le condizioni base del ragionamento che verrà sviluppato nel seguito. Nel secondo e ultimo paragrafo presenteremo un particolare esperimento casuale costruito in maniera tale da permetterci di ricondurre il problema della prova della congettura forte di Goldbach nell'ambito della teoria delle probabilità e, quindi, di cercarne una soluzione per l'esclusivo tramite di metodi probabilistici.

1. Definizioni e risultati preliminari

In questo articolo ci si occuperà principalmente degli elementi dell'insieme $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots, \nu, \ldots\}$, ossia di numeri naturali espressi in base 10 e di alcune operazioni matematiche con questi numeri.

Prima di procedere nel ragionamento, è necessario tuttavia definire sette concetti base, introdurre quattro notazioni preliminari, una particolare sequenza matematica e alcuni risultati fondamentali.

Definizione I_0: Un numero naturale è detto *numero intero positivo*, o semplicemente *intero positivo*, se e solo se è un elemento dell'insieme infinito $\{1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots\} = \mathbf{N}\text{-}\{0\}$.

Definizione I_{00}: Ogni numero naturale $n \in \mathbf{N}\text{-}\{0\}$ ammette almeno un *divisore positivo*, cioè esiste almeno un intero positivo che divide esattamente – i.e., senza produrre resto – il numero n.

Definizione I: Un *numero primo* è un numero intero positivo che non ammette altri divisori positivi che 1 e sé stesso. Secondo questa definizione, 1 è indiscutibilmente un numero primo.

Definizione I_{bis}: Un *numero primo* è un numero intero positivo che ha esattamente due divisori positivi distinti: sé stesso e il numero 1. Secondo questa definizione, 1 non è un numero primo.

Osservazione 1.1: Come si verifica facilmente, le definizioni I e I_{bis} sono equivalenti se applicate ad un qualsiasi numero intero positivo maggiore di 1.

[1] Cfr. BONAVOGLIA P., *1 è un numero primo*, in www.crittologia.eu/mate/1_primo.html, 2017.

Definizione II: Sia $n \in \mathbf{N}$-{0, 1}. Una *coppia di 2n* è una coppia del tipo (n-k, n+k), con $k \in \{0, \ldots, n\text{-}2\}$, formata perciò da due numeri interi positivi che danno come somma 2n. Vi sono così n -1 coppie di 2n.

Definizione III: Sia $n \in \mathbf{N}$-{0, 1}. Una *coppia non-prima di 2n* è una coppia di 2n tale che almeno uno dei due numeri interi positivi che la compone non è un numero primo.

Definizione IV: Sia $n \in \mathbf{N}$-{0, 1}. Una *coppia prima di 2n* è una coppia di 2n tale che entrambi i numeri interi positivi che la compongono sono numeri primi.

Notazione I: Supponendo soddisfatta la definizione I, indichiamo con $_{I}\Pi(n)$ la quantità di numeri primi che sono minori o uguali a n, dove $n \in \mathbf{N}$-{0}.

Notazione I$_{bis}$: Supponendo soddisfatta la definizione I$_{bis}$, indichiamo con $_{bis}\Pi(n)$ la quantità di numeri primi che sono minori o uguali a n, dove $n \in \mathbf{N}$-{0}.

Notazione II: Sia $\eta \in \mathbf{N}$-{0}. Sia inoltre η_n l'intero positivo η corrispondente al numero naturale (indice) n. Sia infine $\{\Pi(\eta_n)\}_{n\in\mathbf{N}\text{-}\{0\}}$ una data successione di numeri naturali in cui ciascun elemento $\Pi(\eta_{ň})$ risulta scelto definitivamente ed equiprobabilmente tra i due termini: $_{I}\Pi(\eta)$ e $_{bis}\Pi(\eta)$.[2] In particolare, se $\eta > 1$, si ha: $\Pi(\eta_{ň}) = \Pi(\eta_\eta) = \Pi(\eta)$. Sicché ogni membro $\Pi(1_{ň})$ della successione di numeri naturali $\{\Pi(1_n)\}_{n\in\mathbf{N}\text{-}\{0,1\}}$ è stato scelto definitivamente ed equiprobabilmente tra i due valori distinti:

$$\Pi(1_{ň}) = {}_{I}\Pi(1) = 1, \text{ se e solo se } \Pi(ň) = {}_{I}\Pi(ň), \text{ e } \Pi(1_{ň}) = {}_{bis}\Pi(1) = 0, \text{ se e solo se } \Pi(ň) = {}_{bis}\Pi(ň).$$

Osservazione 1.2: Dalle tre notazioni precedenti, per le definizioni I$_{bis}$ e I, segue che, per ogni $n \in \mathbf{N}$-{0,1}, $\{_{I}\Pi(n)\}$, $\{_{bis}\Pi(n)\}$ e $\{\Pi(n)\}$ sono tre successioni di interi positivi tali che:

$$_{I}\Pi(n) \le n;\ _{I}\Pi(n) = {}_{bis}\Pi(n) + 1;\ _{bis}\Pi(n) \le \Pi(n) \le {}_{I}\Pi(n).$$

Notazione III: Sia $n \in \mathbf{N}$-{0}. Utilizzeremo la scrittura "log(n)" in luogo di "$\log_e n$", per indicare il logaritmo in base e (Euler's number), o logaritmo naturale, del numero n.

Introduciamo infine la seguente sequenza numerica reale:

$$_{(n)}S_k = [\Pi(n\text{-}k)/(n\text{-}k)]*[\Pi(n+k)\text{-}1/(n\text{-}1)], \text{ dove } n \in \mathbf{N},\ n > 2 \text{ e } k \in \{1, \ldots, n\text{-}2\};$$

$$_{(n)}S_k = {}_{(n)}S_0 = \Pi(n)/n, \text{ con } n \in \mathbf{N} \text{ e } (n = 2 \text{ o } k = 0). \qquad \textbf{(1)}$$

Grazie al teorema di Rosser-Schoenfeld (1962), secondo cui $1/(\log(n) - 0{,}5) < {}_{bis}\Pi(n)/n < 1/(\log(n) - 1{,}5)$, per ogni $n \in \mathbf{N}$ e $n \ge 67$,[3] possiamo provare i seguenti quattro lemmi:

Lemma 1.1: Sia $n \in \mathbf{N}$, $n \ge 8081978$ e $k \in \{1, \ldots, n\text{-}2\}$.

Allora, $_{(n)}S_k < 2/[\log(n) - 1{,}5]$.

Dim. A causa della **(1)** e dell'osservazione 1.2, si può scrivere:

$_{(n)}S_k = [\Pi(n\text{-}k)/(n\text{-}k)]*[\Pi(n+k) \text{-}1 /(n\text{-}1)] \le {}_{bis}\Pi(n+k)/(n\text{-}1)$, da cui, poiché $k \le n\text{-}2$, si ottiene:

$_{(n)}S_k \le [(n+k)/(n\text{-}1)]*[{}_{bis}\Pi(n+k)/(n+k)] < [(2n\text{-}2)/(n\text{-}1)] / [\log(n+k) - 1{,}5] \le 2/[\log(n) - 1{,}5]$.

Lemma 1.2: Sia $n \in \mathbf{N}$, $n \ge 8081978$ e $k \in \{1, \ldots, n\text{-}2\}$.

Allora, $_{bis}\Pi(n) - 1 > n/\log(n)$.

Dim. È sufficiente mostrare che:

$$\{n/[\log(n) - 0{,}5] - n/\log(n)\} > 1 \qquad (1.1)$$

[2] Si pensi $\Pi(\eta_n)$ come un tasto della tastiera di un computer. Non appena s'inseriscono due qualsiasi interi positivi η, $n \in \mathbf{N}$-{0,1} e si preme il tasto $\Pi(\eta_n)$, il computer fornisce sempre lo stesso risultato: il valore che è stato equiprobabilmente scelto tra $_{I}\Pi(\eta)$ e $_{bis}\Pi(\eta)$.
[3] Cfr.BANESCU M., *On the function π(x)*, in www.anstuocmath.ro/mathematics/vol22-1/Banescu_M.pdf, DOI:10.2478.

essendo, per il teorema di Rosser-Schoenfeld, ${}_{bis}\Pi(n) > n/[\log(n) - 0{,}5]$, per ogni $n \in \mathbf{N}$ e $n \geq 67$.

Come è facile verificare, la 1.1 equivale alla disuguaglianza $n > [2\log(n) -1]*\log(n)$, che è soddisfatta, perché, per ogni $n \in \mathbf{N}$ e $n \geq 67$, $f(n) = n / [2\log^2(n)]$ è una funzione di n maggiore di 1 e crescente.

Lemma 1.3: Sia $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 8081978$ e $k \in \{1, \ldots, n\text{-}2\}$.

Allora, ${}_{(n)}S_k > 1/\log^2(n+92)$.

Dim. Si noti che, per l'osservazione 1.2, $\Pi(n) > {}_{bis}\Pi(n) - 1$ e che, per il lemma 1.2, ${}_{bis}\Pi(n) - 1 > n/\log(n)$.

In accordo con la **(1)** e constatato, per verifica diretta, che $\Pi(68\text{-}t)/(68\text{-}t) > \Pi(94)/(94)$, con $t \in \{0, 1, ..., 66\}$, si può scrivere: ${}_{(n)}S_k = [\Pi(n\text{-}k)/(n\text{-}k)]*[\Pi(n+k)\text{-}1/(n\text{-}1)] > 1/[\log(n+92\text{-}k)*\log(n+k)]$, da cui segue che:

${}_{(n)}S_k > 1/[\log(n+92\text{-}k)*\log(n+92+k)] \geq 1/\log^2(n+92)$ (vedi Appendice 1).

Lemma 1.4: Sia P(2n) la funzione reale di variabile reale n così definita:

$P(2n) = {}_{(n)}S_0 + (1-{}_{(n)}S_0)*{}_{(n)}S_1 + (1 -{}_{(n)}S_0)*(1 -{}_{(n)}S_1)*{}_{(n)}S_2 + \ldots + (1 -{}_{(n)}S_0)*(1 -{}_{(n)}S_1)*(1 -{}_{(n)}S_2)*\ldots*(1 -{}_{(n)}S_{n-3})*{}_{(n)}S_{n-2}$,

con $n \in \mathbf{N}$ e $n \geq 8081978$. **(2)**

Allora, la P(2n) assume valori crescenti (decrescenti) al crescere (decrescere) di almeno uno dei suoi parametri costituenti: ${}_{(n)}S_0$, ${}_{(n)}S_1$, ${}_{(n)}S_2$, …, ${}_{(n)}S_{n-2}$.

Dim. Dalla (**2**) segue che: $1 -P(2n) = 1 -{}_{(n)}S_0 -(1-{}_{(n)}S_0)*{}_{(n)}S_1 -(1 -{}_{(n)}S_0)*(1 -{}_{(n)}S_1)*{}_{(n)}S_2 -\ldots-(1 -{}_{(n)}S_0)*(1 -{}_{(n)}S_1)*$
$*(1 -{}_{(n)}S_2)*\ldots*(1 -{}_{(n)}S_{n-3})*{}_{(n)}S_{n-2}$, da cui:

$1- P(2n) = (1 - {}_{(n)}S_0)*[(1 - {}_{(n)}S_1) - (1- {}_{(n)}S_1)*{}_{(n)}S_2 -\ldots- (1-{}_{(n)}S_1)*(1-{}_{(n)}S_2)*\ldots*(1-{}_{(n)}S_{n-3})*{}_{(n)}S_{n-2}]$, ossia:

$$P(2n) = 1- [(1 - {}_{(n)}S_0)*(1 - {}_{(n)}S_1)*(1-{}_{(n)}S_2)*\ldots*(1- {}_{(n)}S_{n-3})*(1- {}_{(n)}S_{n-2})].$$

All'aumentare (diminuire) di almeno uno dei parametri ${}_{(n)}S_0$, ${}_{(n)}S_1$, ${}_{(n)}S_2$, …, ${}_{(n)}S_{n-2}$ decresce (cresce) il prodotto $(1-{}_{(n)}S_0)*(1-{}_{(n)}S_1)*(1-{}_{(n)}S_2)*...*(1-{}_{(n)}S_{n-3})*(1-{}_{(n)}S_{n-2})$ e di conseguenza cresce (decresce) la P(2n), dato che $0 < {}_{(n)}S_0 < 1$ e, per ogni $k \in \{1, \ldots, n\text{-}2\}$, $1/\log^2(n+92) < {}_{(n)}S_k < 2/[\log(n) -1{,}5] < 1$ per i lemmi 1.1 e 1.3.

Osservazione 1.3: In virtù del lemma 1.4, esiste un opportuno numero reale, chiamiamolo ${}_{(n)}S$, tale che:

$P(2n) = {}_{(n)}S_0 + (1 -{}_{(n)}S_0)*{}_{(n)}S + (1 -{}_{(n)}S_0)*(1 -{}_{(n)}S)*{}_{(n)}S + (1 -{}_{(n)}S_0)*(1 -{}_{(n)}S)*(1 -{}_{(n)}S)*{}_{(n)}S + \ldots + (1 -{}_{(n)}S_0)*(1 -{}_{(n)}S)*$
$*(1 -{}_{(n)}S)*\ldots*(1 -{}_{(n)}S)*{}_{(n)}S$, in cui $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 8081978$ e $1/\log^2(n+92) < {}_{(n)}S < 2/[\log(n) - 1{,}5]$. **(3)**

Ponendo $1 -{}_{(n)}S = {}_nq$ nella **(3)**, si ottiene:

$P(2n) = {}_{(n)}S_0 + (1 -{}_{(n)}S_0)*\{{}_{(n)}S*[(1 -{}_nq^{n-2})/(1 -{}_nq)]\} = {}_{(n)}S_0 + (1 -{}_{(n)}S_0)*(1 -{}_nq^{n-2})$, dal momento che il prodotto ${}_{(n)}S*[(1- {}_nq^{n-2}) / (1-{}_nq)]$ è uguale alla somma dei primi n-2 termini della progressione geometrica di termine iniziale ${}_{(n)}S$ e di ragione ${}_nq = (1 -{}_{(n)}S) < 1$.

Osservazione 1.4: Sia (y, z) una coppia di 2n. Sia che si adotti la prima o la seconda definizione di numero primo – i.e., rispettivamente, I o I_{bis} –, l'evento A: "la coppia (y, z) di 2n è prima" non può ritenersi casuale; esso è senz'altro certo o impossibile. Infatti, a causa dell'osservazione 1.1, la coppia (y, z), così come una qualunque altra coppia di 2n, necessariamente, è prima oppure non lo è, giacché, per la definizione II, y e z sono entrambi interi positivi maggiori di 1. La probabilità di A ammette così solo due valori possibili: 0 e 1.

2. *Nocciolo della dimostrazione*

In questa sezione si propone di elaborare un ragionamento in grado di provare la seguente:

Proposizione di Goldbach: Sia $M = \{1, 2, 3, \dots, m, \dots\}$ un sottoinsieme dell'insieme $\mathbf{N}$-$\{0\}$ dei numeri interi positivi, dove $m \geq 8081978$.[4] Sia inoltre soddisfatta la definizione I_{bis} di numero primo.

Allora, l'intero positivo pari $2m \in M$ verifica la congettura forte di Goldbach, vale a dire che 2m può essere espresso come somma di due numeri primi non necessariamente distinti.

A tal proposito supponiamo di approntare un meccanismo aleatorio – come il lancio di una moneta non truccata o l'estrazione con reinserimento da un'urna – attraverso il quale viene attribuita un'etichetta distintiva a ogni elemento dell'insieme infinito $M = \{1, 2, 3, \dots, m, \dots\}$ in maniera tale che:

i. Ogni elemento di M ha due possibili esiti: essere etichettato come «*primo*» o come «*non-primo*»;
ii. Ogni termine $1_{\check{n}} = 1$ della successione $\{1_n\}_{n \in M}$ è contrassegnato in modo che sia definitivamente vera una tra le seguenti due alternative equiprobabili: "1 è etichettato come «primo»" e "1 è etichettato come «non-primo»".[5]
iii. Gli elementi dell'insieme M -$\{1\}$e della successione $\{1_n\}_{n \in M}$ sono indipendenti, nel senso che l'essere etichettato come «primo» o come «non-primo» di uno qualunque di essi non ha influenza né è influenzato in alcun modo dall'essere o meno etichettato come «primo» di un altro o degli altri. In particolare, ognuno di questi elementi ha la stessa probabilità $p = 1/2$ di avere l'etichetta «primo» e di conseguenza la stessa probabilità $(1\text{-}p) = 1/2$ di essere un numero etichettato come «non-primo»;[6]
iv. Siano $n, \eta \in M$ con $n \geq \eta$. Indichiamo con "$F(\eta_n)$" la frequenza relativa dell'esito "etichettato come «primo»" nelle prime η di n prove, ossia, fissato n, il rapporto tra la quantità di interi positivi $\eta_n = \eta$, relativi all'indice n della ennupla $(1_n, \dots, \eta_n)$ etichettati come «primo» e uguali o minori di η e il numero η. In particolare, se $\eta > 1$, allora $n = \eta$ e, per ogni $\upsilon \in \{2, \dots, \eta\}$, $F(\upsilon_n) = F(\upsilon) = \Pi(\upsilon)/\upsilon$;
v. Sia $m \in M$, con $m \geq 8081978$. L'intero positivo 2m può scriversi come somma di due numeri interi positivi non necessariamente distinti ed entrambi etichettati come «primo» se e solo se vale la proposizione di Goldbach;
vi. Per ogni $n \in M$ -$\{1\}$, $0 \leq \Pi(n+1) - \Pi(n) \leq 1$;[7]

Sulla base di queste sei ipotesi, si propongono le quattro osservazioni seguenti:

Osservazione 2.1: La notazione II e l'ipotesi ii, prese congiuntamente, non contengono alcuna ragione per ritenere che $F(1_\eta)$ sia necessariamente uguale a $\Pi(1_\eta)$, qualunque sia $\eta \in \mathbf{N}$-$\{0\}$. Le due frequenze $F(1_\eta)$ e $\Pi(1_\eta)$ potrebbero così assumere valori diversi in quanto esiti di esperimenti aleatori non necessariamente identici. Ne consegue che nessun intero positivo di M che è primo è necessariamente etichettato come «primo», né ogni numero di M etichettato come «primo» è necessariamente un numero primo.

Osservazione 2.2: Sia $\eta \in M$-$\{1\}$. Dall'osservazione 2.1 discende, per le ipotesi iii e vi, che, ogniqualvolta $\Pi(\eta+1) - \Pi(\eta) = 1$, non si può dedurre che $\eta+1$ è un numero etichettato come «primo»; in tal caso, per l'ipotesi iv, ambedue le uguaglianze seguenti: $(\eta+1)*F(\eta+1) = \Pi(\eta+1) = {}_{I}\Pi(\eta+1)$ e $(\eta)*F(\eta) = \Pi(\eta) = {}_{bis}\Pi(\eta)$, potrebbero infatti essere soddisfatte. Similmente, ogni volta che si rileva $\Pi(\eta+1) - \Pi(\eta) = 0$, non può dirsi che $\eta+1$ reca l'etichetta «non-primo»; in tal caso, infatti, potrebbero valere allo stesso tempo le due uguaglianze seguenti: $(\eta+1)*F(\eta+1) = \Pi(\eta+1) = {}_{bis}\Pi(\eta+1)$ e $(\eta)*F(\eta) = \Pi(\eta) = {}_{I}\Pi(\eta)$.

---

[4] Va precisato che la scelta di porre $m \geq 8081978$ non è riconducibile ad alcuna motivazione particolare se non quella di disporre di un numero intero positivo sufficientemente grande così da corroborare il ragionamento che verrà svolto in questo paragrafo.

[5] In altri termini, per ogni $n \in M$, l'etichetta assegnata al numero 1, relativo a 1_n, è frutto di una scelta irripetibile tra due opzioni equiprobabili, «non-primo» e «primo»; scelta che avviene quindi in funzione di n, ossia può variare al variare di n in M.

[6] Si può, ad esempio, supporre di attribuire l'etichetta «primo» all'intero positivo η $[1_\eta]$ se il $2\eta^{mo}$ $[(2\eta+1)^{mo}]$ lancio di una certa moneta non truccata, o la $2\eta^{ma}$ $[(2\eta+1)^{ma}]$ estrazione con reinserimento da una data urna si sia conclusa con l'esito voluto (successo); altrimenti, gli si attribuisce l'etichetta «non-primo». Un siffatto esperimento aleatorio è chiaramente compatibile con le ipotesi i, ii e iii e le rende perciò compossibili, legittimandone l'introduzione.

[7] Per le ipotesi i, ii e iii, tutte le 2^{2m-1} disposizioni con ripetizione delle due etichette distinte, «primo» e «non-primo», a 2m-1 a 2m-1 (m-1 membri di M -$\{1\}$ e m termini di $\{1_n\}_{n \in M}$) sono equiprobabili, ciascuna con probabilità $p^{2m-1} = (1/2)^{2m-1} \geq 0$, e una di esse deve necessariamente verificarsi. Non può dunque esserci, necessariamente, un intero positivo n che sia il più piccolo dei numeri naturali contrassegnati come «primo» («non-primo»). Per cui, potendosi presentare $F(\eta_n) = {}_{bis}\Pi(\eta)/\eta$, per ogni $n, \eta \in M$ e $n \geq \eta$, le ipotesi iv, v, vi sono compossibili e, dunque, tutte ammissibili contemporaneamente.

Osservazione 2.3: Sia $\eta \in M$-{1}. Sia $P(\eta_{«primo»})$ la probabilità che l'intero η rechi l'etichetta «primo». Si ha $P(\eta_{«primo»}) = \Pi(\eta)/\eta$. Si noti innanzitutto che la frequenza relativa F(η) dell'esito "etichettato come «primo»" in η prove può assumere uno dei seguenti sei valori equiprobabili[8]:

${}_{bis}\Pi(\eta)/\eta$, ${}_{I}\Pi(\eta)/\eta$ e ${}_{bis}\Pi(\eta)/\eta$ – corrispondenti rispettivamente ai casi possibili 1, 2 e 3 esplicitati nella seguente nota a piè di pagina –, se $D(\eta+1) = \Pi(\eta+1) -\Pi(\eta) =1$; altrimenti, cioè se $D(\eta+1) =0$, uno tra i valori:

${}_{bis}\Pi(\eta)/\eta$, ${}_{I}\Pi(\eta)/\eta$ e ${}_{I}\Pi(\eta)/\eta$ – corrispondenti rispettivamente ai casi possibili 1-bis, 2-bis e 4 riportati nella seguente nota a piè di pagina –. Pertanto, per l'ipotesi iii e l'osservazione 2.1, appare chiaro che:

$P(\eta_{«primo»}) = [({}_{bis}\Pi(\eta) +{}_{bis}\Pi(\eta) +{}_{I}\Pi(\eta) +{}_{bis}\Pi(\eta) + {}_{I}\Pi(\eta) + {}_{I}\Pi(\eta)]/6\eta$, da cui, semplificando, si ottiene:

$$P(\eta_{«primo»}) = [{}_{bis}\Pi(\eta) +{}_{I}\Pi(\eta)]/2\eta \qquad (2.1)$$

D'altra parte, per la notazione II e l'osservazione 1.2 sono necessari e mutuamente esclusivi i seguenti due casi equiprobabili:

$${}_{bis}\Pi(\eta) = {}_{I}\Pi(\eta) -1 = \Pi(\eta) \text{ e } {}_{I}\Pi(\eta) = {}_{bis}\Pi(\eta) +1 = \Pi(\eta).$$

Ne segue per la 2.1 che: $P(\eta_{«primo»}) = \{[2\Pi(\eta) -1]/2\eta +[2\Pi(\eta) +1]/2\eta\}/2 = 4\Pi(\eta)/4\eta = \Pi(\eta)/\eta$.

Osservazione 2.4: Sia (η-k, η+k) una coppia di 2η, dove $\eta \in M$-{1}, $\eta \geq 8081978$ e $k \in \{0, \dots, \eta-2\}$. Soltanto se k > 0, si supponga che si sia verificato l'evento $E_{(\eta,j)}$, ossia che ogni coppia (n-j, n+j) di 2η, con j che varia in J = {0, …, k-1}, sia formata da almeno un numero intero positivo etichettato come «non-primo». In accordo con l'osservazione 2.3, la probabilità ${}_{(\eta)}P_k$ che la coppia (η-k, η+k) di 2η sia formata da due numeri naturali recanti entrambi l'etichetta «primo» è maggiore o uguale a:

$${}_{(\eta)}S_k = [\Pi(\eta-k)/(\eta-k)]*[\Pi(\eta+k) -1/(\eta-1)], \text{ se } \eta > 2 \text{ e } k \in\{1, \dots, \eta-2\};$$

$${}_{(\eta)}S_k = {}_{(\eta)}P_k = {}_{(\eta)}P_0 = {}_{(\eta)}S_0 = \Pi(\eta)/\eta, \text{ se } \eta = 2 \text{ o } k = 0.$$

Infatti, se η > 2 e k ∈ {1, ..., η-2}, si ha:

$${}_{(\eta)}P_k = [\Pi(\eta-k)/(\eta-k)]*\{[\Pi(\eta+k)-1- H_{(\eta, j)}]/(\eta +k -2(k -1) -1 -1)\} = [\Pi(\eta-k)/(\eta-k)]*\{[\Pi(\eta+k)-1- H_{(\eta, j)}]/(\eta -k)\},$$

dove $H_{(\eta, j)}$ è il numero delle coppie di 2η, esclusa la coppia (η, η), costituenti l'evento $E_{(\eta,j)}$ e aventi ciascuna un solo numero intero positivo etichettato come «primo» (vedi Appendice 2).

Siamo ora in grado di provare il seguente:

Teorema 2.1: Vale la proposizione di Goldbach.

Dim. Sia #P(2m) la probabilità che almeno una delle m-1 coppie di 2m sia formata da due interi positivi non necessariamente distinti e recanti ognuno l'etichetta «primo».

Per il calcolo delle probabilità e l'osservazione 2.4 si ha:

$\#P(2m) \geq P(2m) = {}_{(m)}S_0 +(1 -{}_{(m)}S_0)*{}_{(m)}S_1 +(1 -{}_{(m)}S_0)*(1 -{}_{(m)}S_1)*{}_{(m)}S_2 +\dots+ (1 -{}_{(m)}S_0)*(1 -{}_{(m)}S_1)*(1 -{}_{(m)}S_2)*\dots*$
$*(1 -{}_{(m)}S_{m-3})*{}_{(m)}S_{m-2}$, da cui, per l'osservazione 1.3, si ottiene:

---

[8] Sia $\eta \in M$ -{1} e $D(\eta+1) = \Pi(\eta+1) - \Pi(\eta)$. Per la notazione II e l'ipotesi vi, entrambi gli eventi $D(\eta+1) = 1$ e $D(\eta+1) = 0$ sono possibili. A causa dell'ipotesi iv e l'osservazione 2.2, deve verificarsi uno solo dei seguenti sei casi:

1) $F(\eta) = {}_{bis}\Pi(\eta)/\eta = \Pi(\eta)/\eta$ e $F(\eta+1) = {}_{bis}\Pi(\eta+1)/\eta+1 = \Pi(\eta+1)/\eta+1$, con η+1 numero primo, se $D(\eta+1) = 1$; altrimenti (cioè se $D(\eta+1) = 0$) – caso 1-bis – dove η+1 non è un numero primo;
2) $F(\eta) = {}_{I}\Pi(\eta)/\eta = \Pi(\eta)/\eta$ e $F(\eta+1) = {}_{I}\Pi(\eta+1)/\eta+1 = \Pi(\eta+1)/\eta+1$, con η+1 primo, se $D(\eta+1) = 1$; se no, (i.e. se $D(\eta+1) = 0$) – caso 2-bis – con η+1 numero composto;
3) $F(\eta) = {}_{bis}\Pi(\eta)/\eta = \Pi(\eta)/\eta$ e $F(\eta+1) = {}_{I}\Pi(\eta+1)/\eta+1 = \Pi(\eta+1)/\eta+1$, dove η+1 è un numero composto e $D(\eta+1) = 1$;
4) $F(\eta) = {}_{I}\Pi(\eta)/\eta = \Pi(\eta)/\eta$ e $F(\eta+1) = {}_{bis}\Pi(\eta+1)/\eta+1 = \Pi(\eta+1)/\eta+1$, dove η+1 è un numero primo e $D(\eta+1) = 0$.

I sei casi sopra elencati sono così necessari, mutuamente esclusivi e con la medesima probabilità di verificarsi, perché le etichette attribuite all'1 corrispondente a 1_η ed a η sono scelte, per le ipotesi ii e iii, tra due opzioni equiprobabili: «non-primo» e «primo»; non vi è perciò alcun motivo valido per ritenere che uno di questi sei casi possa verificarsi più facilmente di un altro o degli altri.

$\#P(2m) \geq P(2m) = {}_{(m)}S_0 + (1 - {}_{(m)}S_0)*(1 - {}_mq^{m-2})$, dove ${}_mq < 1 - 1/\log^2(m+92)$. **(4)**

Per l'ipotesi v e l'osservazione 1.4, vale la **G** se e solo se $\#P(2m) \neq 0$, i.e., se e solo se $\#P(2m) = 1$, e quindi, per la **(4)**, se e solo se: $\#P(2m) \geq {}_{(m)}S_0 + (1 - {}_{(m)}S_0)*(1 - {}_mq^{m-2}) = 1$, dove ${}_mq < 1 - [1/\log^2(m+92)]$.

Ora, se fosse $\#P(2m) = 0$, si avrebbe che: $[{}_{(m)}S_0 + (1 - {}_{(m)}S_0)*(1 - {}_mq^{m-2})] = 0$ e dunque che:

$$1 - {}_mq^{m-2} = - {}_{(m)}S_0/(1 - {}_{(m)}S_0), \text{ da cui:}$$

$${}_mq^{m-2} = [{}_{(m)}S_0/(1 - {}_{(m)}S_0)] + 1 \geq 1, \text{ essendo } 0 < {}_{(m)}S_0 < 1$$

D'altra parte, dal fatto che $a_m = [1-1/\log^2(m)]^{\log(m)*\log(m)}$ e $b_m = (m-2)/\log^2(m+92)$, come noto dall'analisi matematica, sono rispettivamente, i termini generali delle due successioni strettamente crescenti $\{a_m\}$ e $\{b_m\}$ di numeri naturali m, con $m \in \mathcal{M} - \{1\}$, si verifica facilmente che:

$$\text{per ogni } m \in \mathcal{M} \text{ e } m \geq 8081978,\ {}_mq^{m-2} \leq [1-1/\log^2(m+92)]^{m-2} \leq e^{-(m-2)/[\log(m+92)*\log(m+92)]} < 0{,}01 < 1.$$

Si giungerebbe così ad una chiara antinomia. Per cui, $\#P(2m) = 1$. La proposizione di Goldbach è perciò dimostrata.

Conclusione

È stato raggiunto l'obiettivo prefissato combinando teoria dei numeri e teoria delle probabilità. Infatti, la congettura forte di Goldbach – ossia l'asserzione: «*Ogni numero naturale pari e maggiore di 2 può essere scritto come somma di due numeri primi non necessariamente distinti*», – è già stata verificata con metodi informatici per tutti i numeri naturali pari inferiori a 290 miliardi[9]. In considerazione della validità della proposizione di Goldbach, tale enunciato risulta così vero per ogni intero positivo pari maggiore di 2.

Appendice 1

Proviamo che: $1/[\log(n-k)*\log(n+k)] \geq 1/\log^2(n)$, dove $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 8081978$ e $k \in \{0, \ldots, n-2\}$.

A tal fine basta mostrare che:

$\log(n-k)*\log(n+k) \leq \log^2(n)$. **(5)**

Si osservi, per le proprietà dei logaritmi, che:

a) $\log(n-k) = \log[(n-k)/n] + \log(n)$;
b) $\log(n+k) = \log[(n+k)/n] + \log(n)$.

La **(5)** si può dunque scrivere:

$\{\log[(n-k)/n] + \log(n)\}*\{\log[(n+k)/n] + \log(n)\} \leq \log^2(n)$, da cui semplificando si ottiene:

$\{\log(n)*\log[(n-k)/n] + \log(n)*\log[(n+k)/n] + \log[(n+k)/n]*\log[(n-k)/n]\} \leq 0$, e quindi:

$\{\log(n)*\log[(n^2-k^2)/n^2] + \log[(n+k)/n]*\log[(n-k)/n]\} \leq 0$.

Il primo membro di quest'ultima disuguaglianza è minore o uguale a zero perché somma di due prodotti entrambi negativi o nulli, essendo $0 \leq k < n$ e, di conseguenza, $[(n-k)/n] \leq 1$. La **(5)** è così dimostrata.

Appendice 2

Nelle ipotesi dell'osservazione 2.4, mostriamo innanzitutto che: $H_{(\eta, j)} \lessapprox (k-1)/\log(\eta-1)$, dove $\eta \geq 8081978$ e $k \in \{1, ..., \eta-2\}$. Assumendo che l'evento $E_{(\eta,j)}$ si sia verificato, non lede la generalità supporre di conoscere quali tra i numeri che formano le η-1 coppie di 2η di $E_{(\eta,j)}$ – e.g., tutti quelli del tipo η-j, o del tipo η+j, e

[9] Cfr. MARTIN B., *La conjecture de Goldbach – Images des Mathématiques*, 2013, in http://images.math.cnrs.fr/La-conjecture-de-Goldbach-1473.html.

comunque al massimo uno per ogni coppia di 2η di $E_{(\eta,j)}$ – siano quelli contraddistinti con l'etichetta «primo». Per cui, dato che $[\Pi(\eta +k -1) -\Pi(\eta) +\Pi(\eta) -\Pi(\eta -k +1)]$ è all'incirca il numero degli interi positivi etichettati come «primo» e compresi nell'intervallo $[n -k +1, n +k -1]$, si può ragionevolmente sostenere che:

$H_{(\eta, j)} \approx [\Pi(\eta +k -1) - \Pi(\eta -k +1)]/2$ e, per l'osservazione 1.2 e il teorema di Rosser-Schoenfeld, che

$2H_{(\eta, j)} \approx [\Pi(\eta +k -1) - \Pi(\eta -k +1)] \lessapprox (\eta +k -1)/\log(\eta +k -1) - [(\eta -k +1)/\log(\eta +k -1)] \leq (2k -2)/\log(\eta +k -1)$, poiché, per verifica diretta, $\Pi(68\text{-}t)/(68\text{-}t) > \Pi(94)/(94)$, con $t \in \{0, 1, ..., 66\}$.

Pertanto, si può supporre che $H_{(\eta, j)} \lessapprox (k -1)/\log(\eta -1)$, con $\eta \geq 8081978$ e $k \in \{1, ..., \eta\text{-}2\}$. Allora, poiché per definizione, $H_{(\eta, j)} = 0$, se $k = 1$, provare che ${}_{(\eta)}P_k = [\Pi(\eta\text{-}k)/(\eta\text{-}k)]*\{[\Pi(\eta+k) -1 -H_{(\eta, j)}]/(\eta -k)\} \geq {}_{(\eta)}S_k$ significa, per ogni $k \in \{2, ... , \eta - 2\}$, verificare che

$[\Pi(\eta\text{-}k)/(\eta\text{-}k)]*\{[\Pi(\eta+k) -1 - H_{(\eta, j)}]/(\eta - k)\} \geq [\Pi(\eta\text{-}k)/(\eta\text{-}k)]*\{[\Pi(\eta+k) -1]/(\eta -1)\}$, la quale assume la forma: $[\Pi(\eta+k) -1 - H_{(\eta, j)}]/(\eta -k) \geq [\Pi(\eta+k) -1]/(\eta -1)$. Svolgendo i calcoli, si ottiene:

$1 - \{H_{(\eta, j)} / [\Pi(\eta+k) -1]\} \geq (\eta -k)/(\eta -1)$,

$(k -1)/(\eta\text{-}1) \geq H_{(\eta, j)} / [\Pi(\eta+k) -1]$,

$(k -1)/(\eta\text{-}1) \gtrapprox (k -1) /\{[\Pi(\eta+k) -1]*\log(\eta\text{-}1)\}$. Sicché, è sufficiente mostrare che

$1 \gg (\eta\text{-}1) /\{[\Pi(\eta+k) -1]*\log(\eta\text{-}1)\}$. **(6)**

Ma la **(6)** vale se $\{(\eta\text{-}1) / [\log(\eta\text{-}1) -0,5]\} -1 \gg (\eta\text{-}1)/\log(\eta\text{-}1)$.

Infatti, per l'osservazione 1.2 e il già menzionato teorema di Rosser-Schoenfeld, si ha

$(\Pi(\eta+k) -1) < (\Pi(\eta+k) \geq {}_{bis}\Pi(\eta+k) \geq (\eta+k) / [\log(\eta +k) - 0,5]$, e quindi

$(\Pi(\eta+k) -1) < (\Pi(\eta+k) \geq {}_{bis}\Pi(\eta+k) \geq (\eta+k) / [\log(\eta+k) - 0,5] > (\eta\text{-}1) / [\log(\eta\text{-}1) - 0,5]$, poiché, per ogni $\eta \in \mathbf{N}$ e $\eta \geq 67$, $g(\eta) = (\eta -1) / [\log(\eta -1) - 0,5]$ è una funzione crescente di η maggiore di 1.

La disuguaglianza $\{(\eta -1) / [\log(\eta -1) - 0,5]\} -1 \gg (\eta -1) / \log(\eta -1)$ è così soddisfatta se

$-\log(\eta -1)*[\log(\eta -1) - 0,5]\} \gg - 0,5*(\eta -1)$,

$\log^2(\eta -1) - 0,5*[\log(\eta -1)] \ll 0,5*(\eta -1)]$, e, a maggior ragione, se

$\log^2(\eta -1) \ll 0,5*(\eta -1)$. Ma quest'ultima relazione è vera, perché $q(\eta) = (\eta -1)/\log^2(\eta -1)$ è una funzione crescente di $\eta \geq 8081978$ molto maggiore di 2. Per cui, la **(6)** è dimostrata.

Bibliografia

1. BANESCU M., *On the function π(x)*, in www.anstuocmath.ro/mathematics/vol22-1/Banescu_M.pdf. Available also at: https://www.researchgate.net/publication/276126753_On_the_Function_px. DOI:10.2478/auom-2014-0002 .
2. BONAVOGLIA P., *1 è un numero primo*, in www.crittologia.eu/mate/1_primo.html, 2017.
3. D'AMICO R., *Il Dio Paradossale e la Congettura di Goldbach*, Di Nicolò Edizioni, Messina, 2018.
4. DU SAUTOY M., *L'enigma dei numeri primi. L'ipotesi di Riemann, il più grande mistero della matematica*, trad di C. Capararo, Biblioteca Univ. Rizzoli, Milano, 2005.
5. MARTIN B., *La conjecture de Goldbach – Images des Mathématiques*, 2013, in http://images.math.cnrs.fr/La-conjecture-de-Goldbach-1473.html.
6. SPIEGEL M., SRINIVASAN A., & SCHILLER, J., *Schaum's Outline of Theory and Problems of PROBABILITY AND STATISTICS.* The Mc Graw-Hill Companies Inc, 2000.